Sedmi domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati do kraja pete glave

1. Da li je matrica $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ proste strukture?

2. Data matrica $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice D.
b) Naći matricu Q, takvu da $Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ zadatog sa:

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

4. Operator $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4)$ je zadat sa:

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Naći invarijante potprostore operatora $\mathcal{G}$. (Podsjećam da po jednoj od teorema petog poglavlja, svaki operator u vektorskom prostoru nad poljem realnih brojeva ima invarijantan potprostor dimenzije 1 ili 2.)
b) Napisati karakteristični polinom operatora $\mathcal{G}$.
c) Provjeriti da je $\mathcal{G}$ korijen svog karakterističnog polinoma. (Ovdje treba koristiti matricu operatora, tj. prosto zamijeniti matricu u karakteristični polinom i provjeriti da se zaista dobija nula matrica.)

5. Operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 2} \to M_{\leq 2})$ je zadat sa $\mathcal{T}f(t) = f(t) + (t+1)f'(t)$.
a) Napisati matricu operatora $\mathcal{T}$ u bazi $\{1, t, t^2\}$.
b) Napisati matricu operatora $\mathcal{T}$ u bazi $\{2 - t^2, t + 3t^2, 3 - t + t^2\}$.
c) Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora $\mathcal{T}$.

6. Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$.

7. Operator $\mathcal{A}$ se naziva nilpotentnim, ako za neki prirodan broj k važi $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$. Dokazati da je operator $]\mathcal{A}$ u kompleksnom vektorskom prostoru nilpotentan, ako i samo ako $\mathcal{A}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.
Uputstvo: Ako ne ide, pogledati početak šeste glave.

8. Neka operator $\mathcal{P}$ zadovoljava jednakost $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}$ za neki prirodan broj k.
a) Pokazati da je $\lambda = 0$ svojstvena vrijednost operatora $\mathcal{P}$.
b) Da li $\mathcal{P}$ koji zadovoljava $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}$ može biti nilpotentan operator?